Cuadernos de Economía. Vol. 23, 377 - 401, 1995

Heterogeneidad y tasa de utilización del nivel agregado de destreza en el mercado de trabajo

Jesús Clemente López

Universidad de Zaragoza (España)
Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza
C) Doctor Cerrada, 3, 50005 ZARAGOZA
E-mail: clemente@posta.unizar.es
Teléfono: 976 761000, ext. 4630

RESUMEN

En este trabajo se desarrollan una serie de modelos en tiempo continuo que son una adaptación al mercado de trabajo del modelo de juventud perpétua de Blanchard (1985) y se sugiere la posibilidad de una nueva medida de utilización del factor trabajo relacionada con la destreza agregada, la tasa efectiva de desempleo, que presente una menor persistencia que las tasas de desempleo. La presencia de aprendizaje en el trabajo y de pérdida de destreza por no trabajar permiten que la tasa de empleo habitual (real) y la tasa efectiva de empleo (el grado de utilización de la destreza agregada) no coincidan. Por consiguiente, existen variaciones estructurales que modifican el valor de largo plazo de la tasa real (histéresis) compatibles con una tasa efectiva constante.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más graves a los que han tenido que enfrentarse las economías occidentales, y en particular la española, en los últimos años es el de la elevada magnitud y persistencia del desempleo. Este fenómenos, aparecido tras la crisis del petróleo, ha generado abundante literatura centrada en el análisis de los denominados mecanismos de persistencia que actúan como factores de distorsión en el mercado que impiden a la tasa de desempleo retornar a sus valores previos tras un shock negativo. La presencia de este tipo de mecanismos ha llevado a aceptar, con carácter prácticamente general, el hecho de que la tasa natural de desempleo de equilibrio pueda variar en el tiempo en función de una serie de elementos "exógenos" (teoría estructuralista de Layrad, Nickell y Jackman (1991) o de la propia experiencia a corto plazo (Jaeger y Parkinson (1994)), con lo que se pierde un punto de referencia básico para la interpretación de las economías a largo plazo como se señala en Karanassou y Snower (1997).

Esta situación, un tanto confusa, sugiere la conveniencia de explorar nuevas medidas de utilización del factor trabajo con un menor grado de persistencia, y cuyo comportamiento sea compatible con el observado en la tasa de desempleo (Andrés, 1993, y con el estimado para la NAIRU (De Lamo y Dolado, 1993).

Uno de los mecanismos de persistencia recientemente destacados en la literatura (Pissarides, 1992, Bean, 1992, y Nickell y Bell, 1995) como potencialmente importantes a la hora de explicar el fenómeno de la histéresis es la pérdida de destreza que experimentan los parados de larga duración y la posibilidad de que estos trabajadores sean discriminados por las empresas a la hora de seleccionar un individuo para cubrir una vacante (Blanchard y Diamond, 1994), fenómeno habitualmente denominado como "ranking".

La presencia en el mercado de estos mecanismos de persistencia determina una población activa donde los trabajadores son heterogéneos en cuanto a su nivel de cualificación. En la medida en que la diferencia de destreza sea un elemento relevante en el mercado puede ponerse en duda la adecuación de la tasa de paro como indicador del grado de utilización del factor trabajo, ya que es un cociente donde los trabajadores son homogéneos. Lo que podría tener sentido es considerar la heterogeneidad utilizando unas unidades que permitan definirla explícitamente. La tasa efectiva de desempleo definida como el porcentaje de la destreza agregada utilizado en la producción puede aportar nuevas ideas acerca de esta problemática, por lo que consideramos de gran interés el análisis del comportamiento de esta nueva medida de utilización del factor trabajo.

En este trabajo se desarrolla una estructura teórica en tiempo contínuo no de equilibrio que incorpora pérdida de destreza para los trabajadores en paro donde la presencia de histéresis en la NAIRU es compatible, bajo determinadas condiciones, con una tasa de no utilización de la destreza agregada (tasa efectiva de desempleo) menos volátil o incluso constante a largo plazo. En definitiva se trata de integrar en una sencilla estructura teórica dos medidas de utilización del factor trabajo: la tradicional NAIRU con un comportamiento similar al estimado y la tasa efectiva de desempleo, menos persistente y que, por consiguiente, permite recuperar un referente fijo a largo plazo en el mercado de trabajo.

Para ello el trabajo se organiza como sigue. En el apartado 2 se presentan los supuestos básicos de los modelos en tiempo contínuo, que son una adaptación para el mercado de trabajo del modelo de juventud perpétua de Blanchard (1985). Por un lado se determinada el comportamiento de dinámico de la población activa y, por otro, el correspondiente a las poblaciones paradas y empleadas suponiendo la existencia de una tasa natural. En el apartado 3 se introducen los fenómenos de "ranking" total, pérdida de destreza y aprendizaje en el trabajo con lo que en el mercado conviven una gran variedad de trabajadores en cuanto al nivel de destreza que presentan y la edad. De esta forma la tasa efectiva de desempleo no coincide con la tasa natural, y se comprueba que variaciones de estas últimas no tienen porqué ir acompañadas por variaciones en la tasa efectiva. En el apartado 4 se relaja el supuesto de "ranking" total admitiendo la posibilidad de reempleo para los parados, obteniendo unos resultados similares a los del apartado 3. Como único hecho diferencial destaca que ahora es la acción conjunta del aprendizaje y de la pérdida de destreza lo que provoca un valor distinto de cada tasa de desempleo. El apartado 5 se centra en el comportamiento de dichas tasas ante variaciones permanentes de los parámetros apoyando los resultados a través de un sencillo ejercicio de simulación. Por último, el trabajo finaliza con las principales conclusiones.

2. POBLACIÓN ACTIVA, PARADA Y OCUPADA EN UN MODELO EN TIEMPO CONTÍNUO. SUPUESTOS

Los modelos en tiempo contínuo permiten diseñar un mercado de trabajo con un horizonte temporal de varios periodos por generación y, por tanto, se puede analizar el papel que juega la pérdida de destreza y el "learning-by-doing" de carácter acumulativos. En este apartado se describe la estructura de la población activa, empleada y parada, y se establecen los supuestos sobre la entrada y salida de las personas en cada categoría.

En cada instante de tiempo una nueva generación, de tamaño p, entra a formar parte de la población activa. Cada individuo tiene una probabilidad instantánea constante de dejar de formar parte de la población activa en cualquier momento, que también es igual a p. Por consiguiente, la probabilidad acumulada de no seguir en la población activa crece en el tiempo. Esta estructura capta el comportamiento de una población en la que continuamente entran y salen individuos y la evolución de la población activa queda reflejada por el comportamiento de la variable aleatoria "tiempo de permanencia en la población activa", cuya distribución suponemos exponencial:

$$f(t\text{-}s) = \begin{cases} p \exp(-p(t\text{-}s)) & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

donde s es el instante de tiempo en el que aparece la generación.

$$E[t\text{-}s] = \frac{1}{p} = \int_{s}^{\infty} (t\text{-}s) \exp(-p(t\text{-}s))ds$$

$$F(t\text{-}s) = 1 - e^{-p(t\text{-}s)} = \int_{s}^{t} \exp(-p(h\text{-}s))dh$$

Todas las generaciones tienen el mismo tamaño en el momento inicial, así la población activa es 1 para todo periodo, es decir, está convenientemente normalizada y simplifica la interpretación de resultados.

$$PA_t = \int_{-\infty}^{t} p \exp(-p(t\text{-}s))ds = 1$$

Como la probabilidad instantánea de dejar de pertenecer a la población activa es constante para cada generación el tamaño de cada una de éstas disminuye en el tiempo.

Una vez establecida la estructura de la población activa debemos describir el "reparto" del empleo. Nuestra hipótesis será que la variable aleatoria "tiempo que está empleando en caso de formar parte de la población activa" sigue una distribución exponencial, en la que α es la probabilidad instantánea de que un miembro de la generación que se incorpora en el instante s a la población activa quede parado en t, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que un puesto de trabajo productivo deje de serlo y se despida al trabajador que lo ocupaba:

$$f(t\text{-}s) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha(t\text{-}s)) & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

Con lo que $e^{-\alpha (t-s)}$ es la probabilidad de que un trabajador siga trabajando. La población empleada definida como los individuos que quedan activos de cada generación y que no han sido despedidos puede determinarse como:

$$PE_t = \int_{-\infty}^{t} p \exp[-p(t-s)] \ \exp[-\alpha(t-s)]ds = \frac{p}{\alpha+p} \qquad [1]$$

Dado que hemos normalizado la población activa, la población en paro será:

$$PP_t = PA_t - PE_t = 1 - \frac{p}{\alpha+p} = \frac{\alpha}{\alpha+p} \qquad [2]$$

Aunque esta forma de proceder parece compleja, debemos destacar que una óptica de flujos nos conduciría a los mismos resultados. Como en estado estacionario los flujos de entrada y salida en la población empleada son idénticos no es difícil ver que la población activa viene dada por [1]. De la misma forma si, en estado estacionario, ambos flujos se igualan para la población parada debe mantenerse [2]. Por consiguiente, los resultados obtenidos en las expresiones correspondientes pueden interpretarse como las poblaciones y las tasas de estado estacionario.

La normalización implica que las poblaciones empleada y parada coinciden con las tasas de empleo (q*) y de paro reales (U) respectivamente. Por otro lado, partiendo de una cualificación inicial de cada trabajador igual a la unidad y teniendo en cuenta que la no presencia de aprendizaje y pérdida de destreza, podemos concluir que el nivel de cualificación de cada trabajador es constante en el tiempo, con independencia de su historia laboral. Por tanto, el nivel de destreza agregado (población activa efectiva), el nivel de destreza empleado (población empleada efectiva) y el ocioso (población parada efectiva) coinciden con la población activa, empleada y parada reales respectivamente.

3. PÉRDIDA DE DESTREZA ACUMULADA SIN REEMPLEO

La presencia en el mercado de trabajadores heterogéneos puede estar originada por varios procesos. En este apartado consideraremos que el proceso relevante es la pérdida de destreza que sufren los trabajadores en paro, proceso que no modifica el valor de la tasa natural dado que ésta hace referencia únicamente a los individuos, pero que influye claramente sobre la tasa efectiva. Para calcular la población parada efectiva en cada periodo debe tenerse en cuenta que la destreza de cada trabajador parado disminuye en el tiempo y, por tanto, la población parada efectiva no coincide con la real, provocando que las tasas de empleo real y efectiva sean distintas. En este modelo la población parada efectiva será:

$$PPE_t = \int_{-\infty}^{t} \int_{s}^{t} \alpha \, p \exp[-p(t-s)] \ \exp[-\alpha(t_1-s)] \exp[-\beta(t-t_1)]dt_1 \, ds \qquad [3]$$

donde $\alpha p \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t_1-s)]$ es la parte de la generación integrada en la población activa en el periodo s que quedó en paro en t_1 y todavía está activa en t. Por tanto estos individuos pierden destreza a tasa β desde el momento en el que entran en la población parada, t_1.

Desarrollando [3] se obtiene la población parada efectiva o nivel de cualificación o destreza de la población parada para un instante de tiempo t:

$$PPE_t = \frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\beta)} \quad [4]$$

En cuanto a la población empleada efectiva, será igual a la real e idéntica a [1], dado que los que continúan trabajando no acumulan ni desacumulan destreza, mientras que la población parada real es [2], con lo que las tasas reales de este modelo, M2, coinciden con las del apartado anterior, M1. Lógicamente la tasa efectiva es menor que la real: $PPE_t < PP_t$, ya que $\frac{p}{p+\beta} < 1$.

A partir de [2] y [4] se calcula la población activa efectiva:

$$PAE_t = PEE_t + PPE_t = \frac{\alpha p + p(p+\beta)}{(\alpha+p)(p+\beta)}$$

y la tasa efectiva de empleo y de desempleo:

$$q_{M2} = \frac{PEE_t}{PAE_t} = \frac{p(p+\beta)}{\alpha p+p(p+\beta)} = \frac{p+\beta}{\alpha+p+\beta} \quad [5]$$

$$UE_{M2} = \frac{PP_t}{PAE_t} = \frac{\alpha p}{\alpha p+p(p+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+p+\beta} \quad [5']$$

y resulta inmediato que la tasa efectiva de empleo (desempleo) es mayor (menor) que la real:

$$q_{M2} > q^*_{M2} = q^*_{M1} \qquad \forall\beta > 0$$

$$UE_{M2} < U_{M2} = U_{M1} \quad \forall\beta > 0$$

Mientras que la pérdida de destreza no influye en la tasa real sí que lo hace sobre la efectiva. Por consiguiente, es posible que determinados cambios estructurales en ρ o α se vean compensados por el comportamiento de β.

Otro resultado destacable es que la tasa real es más volátil que la efectiva ante variaciones de los parámetros p y α siempre que la población empleada sea superior a la parada ($p<\alpha$), es decir que se cumpla que:

$$\alpha^2 < p(p+\beta) = p^2+\beta\, p$$

Por tanto, si ambos parámetros, β y α, se modifican simultáneamente las tasas reales varían con efecto conocido mientras que el efecto sobre las efectivas es indeterminado, y la relación, obtenida de [5] que debe existir entre las variaciones de ambos parámetros para que la tasa efectiva no se modifique es:

$$\frac{d\beta}{\beta+p} = \frac{d\alpha}{\alpha}$$

La expresión anterior indica que realmente la tasa efectiva permanecerá constante cuando la variación relativa en la tasa de entrada de unidades efectivas en el desempleo, $\frac{d\alpha}{\alpha}$,sea igual a la tasa de salida de la población activa por pérdida de destreza, $\frac{d\beta}{\beta+p}$. Por tanto, si un incremento de la tasa natural va acompañado con un incremento de pérdida de destreza por parte de los desempleados, la variación en la tasa efectiva será menor. En la medida que un incremento de la probabilidad de quedar en paro vaya acompañado por una mayor pérdida de destreza por estar parado relativa a los que siguen trabajando, el valor de estado estacionario de la tasa de paro varía más que la efectiva.

Este mismo resultado puede verse a través de la relación entre ambas tasas:

$$UE = \frac{p\ U}{p + \beta\ (1-U)} = \frac{\alpha\ U}{\alpha + \beta\ U} \qquad [6]$$

En [6], al aumentar UE aumenta U y viceversa. No obstante, si consideramos que el valor de β depende de U, las variaciones de U se ven "suavizadas" por las de β, de forma que no se produce por una variación en el mismo sentido de la tasa efectiva.

Sin embargo en el mercado de trabajo resulta interesante plantear otras posibilidades de heterogeneidad introduciendo "learning-by-doing", modelo M3. Este modelo influirá en el valor de la población empleada efectiva, dado que aumenta el nivel de destreza agregada que tienen estos trabajadores y en la población parada efectiva ya que los trabajadores acumulan destreza hasta el momento de ser despedidos.

La manera de introducir este elemento será a través de una tasa ϕ ($\phi<p+\alpha$) ,equiparable a un progreso técnico aumentador de trabajo. Esta circunstancia modifica las poblaciones activas, empleada y desempleadas efectivas, pero no modifica las reales, dado que se ven afectadas por la acumulación de destreza desde el momento en que se incorporan a la población activa, para ir perdiéndola desde el instante de tiempo t_1 en el que son despedidos, es decir:

$$PPE_t = \int_{-\infty}^{t} \int_{s}^{t} \alpha p \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t_1-s)] \exp[-\beta(t-t_1)] \exp[\phi(t_1-s)]\, ds dt_1 =$$

$$= \frac{\alpha p}{(\alpha+p-\phi)(p+\beta)} \qquad [7]$$

La PPE es mayor que la considerada en el modelo M2. No obstante, la relación con la magnitud correspondiente de M1 no resulta evidente y depende de los valores de los parámetros. De manera análoga podemos calcular la población empleada efectiva (que es superior a la de los modelos anteriores), introduciendo la acumulación correspondiente en el caso de no ser despedido, es decir, de estar trabajando desde el momento en el que un individuo se incorporó como fuerza de trabajo al mercado laboral:

$$PEE_t = \int_{-\infty}^{t} p \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t-s)] \exp[\phi(t-s)]\, ds = \frac{p}{\alpha+p-\phi} \qquad [8]$$

Una vez calculadas las poblaciones empleadas y paradas efectivas, consideramos a continuación la activa, las tasas de paro y las de ocupación.

$$PAE_t = PEE_t + PPE_t = \frac{\alpha p+p(\alpha+\beta)}{(\alpha+p-\phi)(p+\beta)}$$

$$q = \frac{PEE}{PAE} = \frac{p+\beta}{\alpha+p+\beta} \qquad [9]$$

$$UE = \frac{PPE}{PAE} = \frac{\alpha p}{(p+\beta)(\alpha+p-\phi)} \frac{(\alpha+p-\phi)(p+\beta)}{p(\alpha+p+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+p+\beta}$$

La introducción de "learning-by-doing" modifica los valores absolutos de las variables efectivas, pero no lo hace en términos relativos, y las tasas de paro y empleo iguales a las del modelo anterior. Por consiguiente, en modelos sin reempleo es la pérdida de destreza y no el aprendizaje el que provoca que las tasas reales y efectivas sean distintas.

Los modelos M1 y M2 son casos particulares de M3. A partir de éste podemos definir un nuevo modelo, M4, en el que haya progreso técnico y no haya pérdida de destreza. Bastará con hacer $\beta = 0$ en [7]-[9]. De esta forma conseguimos las siguientes expresiones para un modelo sin pérdida de destreza y con proceso de "learning-by-doing":

$$PPE_t = \frac{\alpha}{\alpha+p-\phi}\ ,\ PEE_t = \frac{\alpha}{\alpha+p-\phi}$$

$$PAE_t = \frac{\alpha+p}{\alpha+p-\phi}\ ,\ PE_t = \frac{p}{\alpha+p}\ ,\ PP = \frac{\alpha}{\alpha+p}$$

$$q = \frac{PEE}{PAE} = \frac{\alpha}{\alpha+p}\ ,\ UE = \frac{p}{\alpha+p}$$

$$q^* = \frac{\alpha}{\alpha+p}\ ,\ U = \frac{p}{\alpha+p}$$

Otra vez constatamos que *si no hay pérdida de destreza, el fenómeno de "aprendizaje" no es suficiente para poder discernir entre unas tasas efectivas y otras reales.* El resumen de los resultados en los modelos analizados en los apartados 2 y 3 está contenido en el Cuadro 1. Comparando las distintas columnas surge la principal conclusión: el elemento clave que provoca unas tasas efectivas y reales distintas es la pérdida de destreza de los parados; la presencia de "learning-by-doing" no es relevante en este ámbito.

Otra conclusión importante es qué cambios en los parámetros afectan de manera distinta a las tasas reales y las afectivas. Si se produce un aumento en la probabilidad de ser despedido, es decir, si aumenta en α. en los modelos M2 y M3 se incrementa la tasa de paro. Sin embargo, si este fenómeno va acompañado por un incremento de la tasa de pérdida de destreza, las tasas efectivas pueden permanecer constantes a largo plazo aunque las reales varíen.

CUADRO 1: Modelos sin reempleo

	M1	M2(β)	M3(β,φ)	M4(φ)
PA	1	1	1	1
PAE	1	$\frac{p(p+\beta+\alpha)}{(\alpha+p)(p+\beta)}$	$\frac{p(p+\beta+\alpha)}{(\alpha+p-\phi)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha+p}{\alpha+p-\phi}$
PP	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$
PPE	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p-\phi)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p-\phi}$
PE	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$
PEE	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p-\phi}$	$\frac{p}{\alpha+p-\phi}$
q*	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p}{\alpha+p}$
q	$\frac{p}{\alpha+p}$	$\frac{p+\beta}{\alpha+p+\beta}$	$\frac{p+\beta}{\alpha+p+\beta}$	$\frac{p}{\alpha+p}$
U	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$
UE	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p+\beta}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p+\beta}$	$\frac{\alpha}{\alpha+p}$

4. Modelos con reempleo

En los modelos anteriores un trabajador no vuelve a trabajar una vez que ha sido despedido. Este supuesto significa que en la economía hay "ranking" discriminación de los parados total y puede resultar poco realista. A continuación presentamos unos modelos donde existe la posibilidad de volver a ser empleado desde el paro, lo que, evidentemente afectará al valor de la tasa natural y el de la tasa efectiva. La vía para introducir el reempleo será suponer que existe una probabilidad instantánea γ de volver a trabajar para los individuos que han sido despedidos, o, dicho de otra manera, existe una probabilidad de que un empleo que dejó de ser productivo vuelva a serlo. La variable aleatoria "tiempo transcurrido hasta ser reempleado tras ser despedido" sigue la siguiente distribución exponencial:

$$f(t-t_1) = \begin{cases} \gamma \exp[-\gamma(t-t_1)] & \text{si } t \geq t_1 \\ 0 & \text{si } t < t_1 \end{cases}$$

Donde t_1 es el instante de tiempo en el que fue despedido el trabajador. De esta manera, la probabilidad de encontrar empleo depende del tiempo que se lleve buscando. Por otro lado, si γ es grande significa que el individuo comienza con fuerza su proceso de búsqueda, para posteriormente ir disminuyendo su intensidad. Lo que resulta evidente es que en este caso es necesario calcular tanto las poblaciones reales como las efectivas.

La población empleada real en el caso de que haya sólo pérdida de destreza, es igual a la correspondiente del modelo M1 más los reempleados. Por tanto, debemos incorporar a la población empleada del primer modelo los individuos que volvieron a trabajar tras ser despedidos, lo cual se instrumenta a través de una integral triple que contemple los tres momentos fundamentales de la historia del trabajador: el instante de entrada en la población activa, el momento en el que se le despidió y el de vuelta al trabajo. Por tanto, la población empleada, en el momento en el que se le despidió y el de vuelta al trabajo. Por tanto, la población empleada, en el modelo que denominamos M7, superior a la del modelo M1, es:

$$PE_t = PE_t = PE_{M1} + \int_{-\infty}^{t}\int_{s}^{t}\int_{t_1}^{t} \alpha\gamma p \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t_1-s)] \exp[-\gamma(t_2-t_1)]\, dt_2\, dt_1\, ds =$$

$$= PE_{M1} + \frac{\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)} = \frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)} \qquad [10]$$

Como la población activa es igual a la unidad, resulta sencillo obtener la población parada:

$$PP_t = 1 - PE_t = 1 - PE_{M1} - \frac{\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)} = PE_{M1} - \frac{\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)} \qquad [11]$$

Y las tasas reales coinciden con las poblaciones.

$$q_t^* = \frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)} \qquad [12]$$

$$U = \frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)} \qquad [12']$$

A continuación obtendremos el comportamiento de las tasas efectivas en el caso de que todos los elementos descritos anteriormente estén actuando en el mercado. Es decir, una situación donde hay pérdida de destreza, aprendizaje y reempleo. Obviamente, es posible encontrar los casos correspondientes a los modelos M1, M2 y M4 con reempleo a partir del modelo general. Para que sea posible el cálculo de las tasas efectivas es necesario suponer que la probabilidad instantánea de salir de la población activa sea mayor que la tasa de "learning-by-doing".

Para obtener la población empleada efectiva debemos tener en cuenta los distintos estados por los que puede pasar un trabajador: en un primer intervalo de tiempo estaría acumulando destreza; posteriormente, al ser despedido, desacumula a una tasa distinta que se aplica sobre el total adquirido en el periodo anterior; por último, si es reempleado, vuelve a acumular destreza. Bajo esta perspectiva la población empleada efectiva es:

$$PEE_t = PEE_{M3} + \int_{-\infty}^{t} \int_{s}^{t} \int_{t_1}^{t} \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t_1-s)] \exp[-\gamma(t_2-t_1)]$$

$$\exp[-\beta(t_2-t_1)] \exp[\phi(t-t_2)] \exp[\phi(t_1-s)]\, dt_2\, dt_1\, ds =$$

$$= PEE_{2t} = \frac{p}{\alpha+p-\phi} \; \frac{\gamma(\alpha+p-\alpha)+(p+\beta)(p-\phi)}{(p+\gamma+\beta)(p-\phi)} \qquad [13]$$

Para el desempleo efectivo también tenemos que tener en cuenta la triple integral que representa los tres estados distintos por los que puede pasar un individuo:

$$PPE_t = PPE_{M3} - \int_{-\infty}^{t} \int_{s}^{t} \int_{t_1}^{t} \alpha p \gamma \exp[-p(t-s)] \exp[-\alpha(t_1-s)] \exp[-\gamma(t_2-t_1)]$$

$$\exp[-\beta(t-t_1)] \exp[-\phi(t_1-s)]dt_2\, dt_1\, ds =$$

$$= \frac{\alpha p}{(p+\beta+\gamma)(\alpha+p-\phi)} \qquad [14]$$

Tras este desarrollo podemos determinar la población activa efectiva y las tasas efectivas de empleo y desempleo:

$$PAE_t = PEE_t + PPE_t = \frac{p}{p-\phi}\left[\frac{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha(p+\gamma-\phi)}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma+\beta)}\right] \qquad [15]$$

$$q_t = \frac{PEE_t}{PAE_t} = \frac{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma}{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha(p+\gamma-\phi)}$$

$$UE = \frac{PEE_t}{PAE_t} = \frac{\alpha(p-\phi)}{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha(p+\gamma-\phi)}$$

Que la tasa efectiva de empleo es superior a la NAIRU se demuestra, de manera inmediata, comparando [15] con [12].

Como conclusión importante destaca la circunstancia de que en este caso, cuando se permite reempleo, la tasa de aprendizaje sí que afecta a las tasas efectivas. Se trata del modelo completo, del que podemos obtener el resto de los modelos haciendo nulos los distintos parámetros. De nuevo es posible que varíe U manteniéndose UE constante. La condición necesaria y suficiente, obtenida a partir de [15] para que las tasas de empleo y de desempleo permanezcan constantes en el modelo M7 ante variaciones en los parámetros α, γ, ϕ y β es:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha+p-\phi}{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)}d\gamma - \frac{\gamma}{(p-\phi)^2(p+\gamma+\beta)}d\phi = \frac{d\beta}{p+\gamma+\beta}$$

La primera característica importante es que el "learning-by-doing" únicamente interviene si hay reempleo, ya que, si el segundo componente desaparece ($\gamma = d\gamma = 0$), también lo hace el tercero. De nuevo es destacable que la variación del parámetro β necesaria para que permanezca constante q es mayor, puesto que en un periodo de recesión es lógico suponer menor tasa de aprendizaje en el trabajo. En los periodos de crisis el progreso tecnológico se detiene, y el uso del capital humano es menos intensivo, por lo que los procesos de aprendizaje se desaceleran.

Si un mercado laboral rígido que no permitiese el reempleo pasase a permitirlo, tendería a disminuir la tasa efectiva de desempleo, siempre y cuando las personas que se incorporen a un puesto de trabajo no provoquen una disminución de la tasa de aprendizaje, o se de una mayor tasa de depreciación de los que no han conseguido trabajar, o no se aumente la probabilidad de ser despedido pasando a ser esta medida una simple rotación entre trabajadores.

Si se produce un shock negativo en la economía, el movimiento lógico de los parámetros será: $\uparrow\alpha, \downarrow\gamma, \downarrow\phi$; por consiguiente, es necesaria una aceleración de la pérdida de destreza para que UE sea constante. A través de las expresiones correspondientes a M7 es posible obtener las correspondientes a distintos modelos según en el mercado aparezca aprendizaje o pérdida de destreza. El resumen de los resultados obtenidos en los modelos con reempleo puede encontrarse con el cuadro 2.

CUADRO 2. Modelos con reempleo

	M5(γ)	M6(γ,β)	M7(γ,β,ϕ)	M8(γ,ϕ)
PA	1	1	1	1
PAE	1	$\frac{p(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma+\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{p}{p-\phi}\,\frac{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha(p+\gamma-\phi)}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{p}{p-\phi}\,\frac{(p-\phi)(p+\gamma)+\alpha(p+\gamma-\phi)}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma)}$
PP	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$
PPE	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma)}$
PE	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$
PEE	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{p}{p-\phi}\,\frac{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma+\beta)}$	$\frac{p}{p-\phi}\,\frac{(p-\phi)(p+\beta)+\alpha\gamma}{(\alpha+p-\phi)(p+\gamma)}$
q*	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$
q	$\frac{p(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{p(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma}{p(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma+\alpha p}$	$\frac{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma}{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma+\alpha(p-\phi)}$	$\frac{(p-\phi)(p+\gamma)+\alpha\gamma}{(p-\phi)(p+\gamma)+\alpha\gamma+\alpha(p-\phi)}$
U	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$
UE	$\frac{\alpha p}{(\alpha+p)(p+\gamma)}$	$\frac{\alpha p}{p(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma+\alpha p}$	$\frac{\alpha(p-\phi)}{(p-\phi)(p+\gamma+\beta)+\alpha\gamma+\alpha(p-\phi)}$	$\frac{\alpha(p-\phi)}{(p-\phi)(p+\gamma)+\alpha\gamma+\alpha(p-\phi)}$

5. AJUSTE DINÁMICO A CORTO Y A LARGO PLAZO ANTE SHOCKS PERMANENTES

Un comportamiento cíclico en estos modelos es sencillo de justificar. Basta una variación transitoria de algún parámetro estructural para producir fluctuaciones en torno a los valores de largo plazo. Más interesantes resultan las variaciones permanentes dado que, como se desprende del modelo teórico, afectan en mayor medida a la tasa real que a la afectiva y existen combinaciones de variaciones de los parámetros que hacen variar la tasa real de largo plazo que no modifican la efectiva.

En este apartado se realiza un sencillo ejercicio de simulación donde se analiza el comportamiento de ambas tasas ante variaciones permanentes. Evidentemente, una variación permanente de los parámetros modifica las expresiones de cálculo, aunque no en sus expresiones finales si en el comportamiento dinámico que adoptan las distintas tasas de desempleo, real y efectiva, hasta llegar a su nuevo valor a largo plazo. El análisis del comportamiento se realizará para los modelos sin reempleo, dado que permiten ver claramente las consecuencias de variaciones permanentes en los parámetros, cuestión que se complica substancialmente en los modelos con reempleo.

a) Shock permanente en α: Modelo M2

De los resultados correspondientes al modelo M2 resulta intuitivo concluir que un shock negativo (mayor valor de α) hará aumentar el valor de largo plazo de las dos tasas, siendo el incremento mayor en la real. Un shock positivo tendrá el efecto contrario. No obstante, es interesante conocer cuál es la evolución dinámica de estas variables que les conduce de un valor a otro. Para este objetivo necesitamos calcular las poblaciones empleada y parada reales y efectivas para cualquier periodo.

Para calcular la población empleada efectiva, que coincidirá con la real, debemos distinguir las generaciones que surgen antes y después del instante de tiempo h en el que se produjo la variación del parámetro α (que representamos con Δ). Así, la población empleada efectiva es (desarrollos en el apéndice):

$$PEE_t = \frac{p}{p+\alpha+\Delta} + \exp[-p(t-h)]\frac{\Delta p}{(p+\alpha)(p+\alpha+\Delta)} \qquad [17]$$

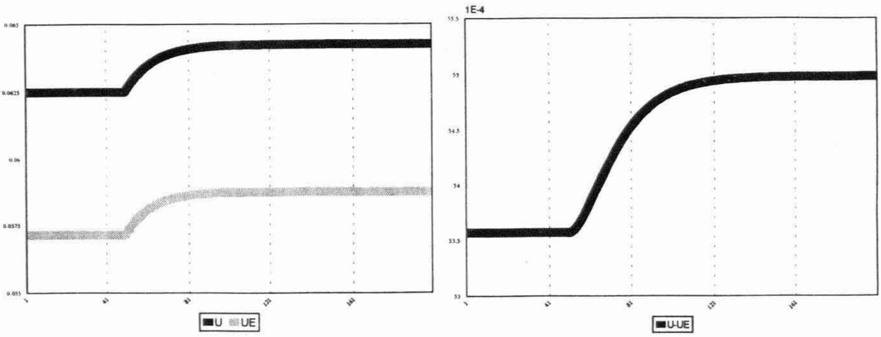
El cálculo de la población parada y de la tasa de paro real es sencillo dado que la población activa es igual a la unidad: $PP_t = 1 - PE_t = 1 - PEE_t$. El cálculo de la población parada efectiva es más complejo dado que hay que tener en cuenta el parámetro de pérdida de destreza, con lo que (ver apéndice):

$$PPE_t = \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} + \exp[-(p+\beta)(t-h)]\frac{\Delta p^2}{(p+\alpha)(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} \qquad [19]$$

$$= \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} + \exp[-(p+\beta)(t-h)]\left(\frac{\alpha p}{(p+\alpha)(p+\beta)} - \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)}\right)$$

El comportamiento de las tasas efectiva y real se puede comprobar en el gráfico 1, donde los valores de los parámetros son: $\alpha = 0.005$, $p = 0.075$, $\beta = 0.0075$ (con lo que se está suponiendo una tasa de paro inicial del 6'25%), $\Delta = 0.00015$. Adicionalmente este gráfico ilustra acerca de que en el caso de que hay un shock negativo la distancia entre ambas tasas aumenta. Por consiguiente, resultaría un indicador menos fluctuante del grado de utilización del factor trabajo.

GRÁFICO 1; MODELO M2 CON SHOCKS PERMANENTES EN EL PARÁMETRO ALFA



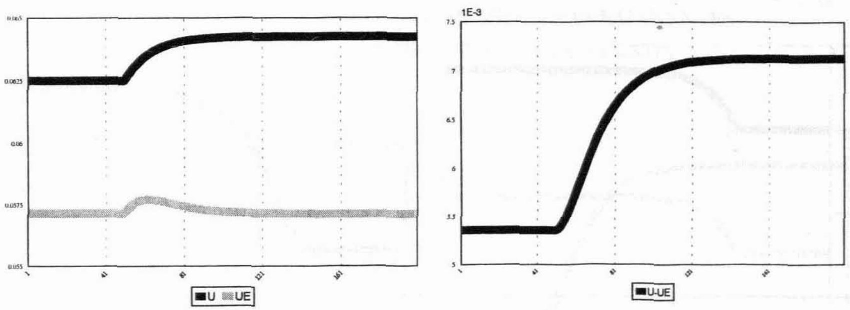
b)Shock permanente en α y β: Modelo M2

En este apartado estudiamos los efectos sobre ambas tasa debido a variaciones en dos parámetros: α y β. En este caso la población empleada efectiva coincide con la obtenida en el subapartado anterior. Esto es así porque no hay aprendizaje en el trabajo y, por consiguiente, ambas poblaciones coinciden. El cálculo de la población parada efectiva no es complicado. Es similar al del subapartado anterior; simplemente debemos añadir un δ al parámetro de pérdida de destreza cuando actúa entre h y t. De esta forma, introduciendo el nuevo elemento, δ, obtenemos la población parada efectiva:

$$PPE_t = \frac{\alpha p}{(p+\alpha)(p+\beta)} \exp[-(p+\beta)(t-h)] + \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\beta+\delta)(p+\alpha+\Delta)} \left(1-\exp[-(p+\beta+\delta)(t-h)]\right) \quad [20]$$

En el gráfico 2 se comprueba que mientras la tasa real se aleja de su valor inicial de largo plazo puesto que sólo le afecta la variación de alfa, si se produce simultáneamente una variación adecuada de la pérdida de destreza la tasa efectiva puede retornar a una situación cercana, con un movimiento cíclico, al valor inicial de largo plazo. Los valores de los parámetros son los mismos que en el apartado anterior y para el parámetro de pérdida de destreza se considera: $\beta = 0.0075$, $\delta = 0.0025$. De nuevo se observa, gráfico 2, que la diferencia entre ambas tasas se incrementa en los primeros periodos tras el shock y se mantiene en esos niveles a largo plazo.

GRÁFICO 2; MODELO M2 CON SHOCKS PERMANENTES EN LOS PARÁMETROS ALFA Y BETA



C) Shock permanente en α: Modelo M3

En este apartado estudiamos los efectos de las variaciones de los parámetros cuando hay aprendizaje. En este caso se verán modificadas tanto la población parada efectiva como la empleada, dado que este proceso afecta a ambas. De nuevo tenemos que distinguir entre generaciones que aparecieron en el mercado de trabajo antes del instante en el que tuvo lugar el shock y las posteriores. Así población empleada efectiva es (ver apéndice):

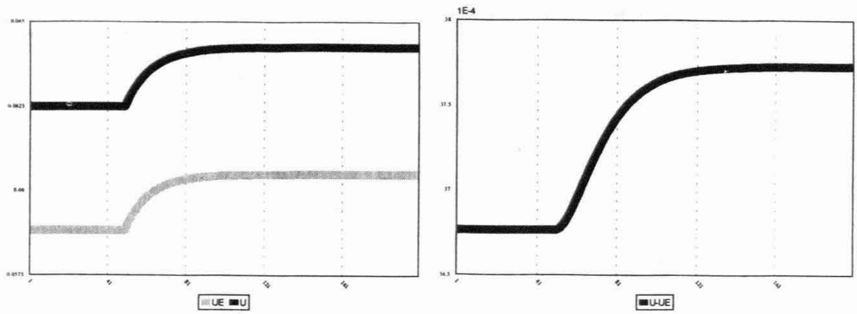
$$PEE_t = \frac{p}{p-\phi+\alpha+\Delta} + \exp[-(p-\phi)(t-h)]\frac{\Delta p}{(p-\phi+\alpha)(p-\phi+\alpha+\Delta)} \qquad [22]$$

En cuanto a la población parada efectiva queda como (ver apéndice):

$$PPE_t = \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta-\phi)(p+\beta)} + \exp[-(p+\beta)(t-h)] \frac{\Delta p(p-\phi)}{(p+\alpha-\phi)(p+\alpha+\Delta-\phi)(p+\beta)} \qquad [24]$$

El gráfico 3 representa el comportamiento de la tasa efectiva y real de desempleo y de la diferencia entre ambas donde Ø =0.0075. Como puede comprobarse los resultados son similares a los obtenidos en el subapartado a), cuestión normal si como se demostró en la sección 3 la presencia de aprendizaje no provoca ningún efecto sobre el valor de las tasas efectiva y real. Es destacable que tampoco tiene ningún efecto en el comportamiento dinámico de ajuste hacia el nuevo valor de largo plazo.

GRÁFICO 3; MODELO M3 CON SHOCKS PERMANENTES ALFA



d) Shock permanente en α, β y ϕ: Modelo M3

El último caso de estudio va a consistir en el análisis del modelo M3 con variaciones de los tres parámetros relevantes. La variación del parámetro de aprendizaje viene dado por λ. De nuevo se verán modificadas tanto la población parada efectiva como la empleada dado que este proceso afecta a ambas. La población empleada efectiva se determina introduciendo el nuevo elemento en las expresiones anteriores, con lo que queda que:

$$PEE_t = \frac{p}{p-\phi-\lambda+\alpha+\Delta}$$

$$+ \frac{p\exp[-(p-\phi-\lambda)(t-h)]}{(p-\phi+\alpha+\Delta)} \left(\frac{\Delta}{(p-\phi+\alpha)} - \frac{\lambda\exp[-(\alpha+\Delta)(t-h)]}{(p-\phi-\lambda+\alpha+\Delta)} \right) \qquad [25]$$

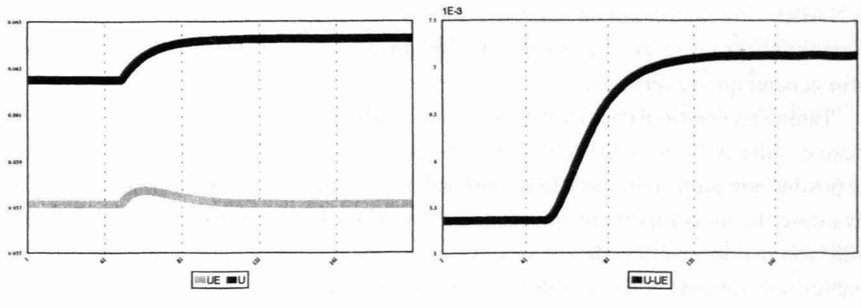
Y para la población parada efectiva se obtiene que:

$$PPE_t = \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta-\phi-\lambda)(p+\beta+\delta)} + \frac{\alpha p}{(p+\alpha-\phi)(p+\beta)} \exp[-(p+\beta)(t-h)] -$$

$$- \frac{p(\alpha+\Delta)}{(p+\alpha-\phi)(p+\alpha+\Delta-\phi-\lambda)(p+\beta+\delta)} \exp[-(p+\beta+\delta)(t-h)] \qquad [26]$$

El gráfico 4 representa el comportamiento de la tasa efectiva y real de desempleo y de la diferencia entre ambas, donde $\lambda = 0.00025$. Los resultados coinciden con M2 y el comportamiento a corto plazo también es el mismo.

GRÁFICO 4; MODELO M4 CON SHOCKS PERMANENTES EN LOS PARÁMETROS ALFA, BETA Y LANDA



6. Conclusiones

En este trabajo se presentan una serie de modelos en tiempo contínuo que nos permiten analizar un mercado de trabajo con infinitas generaciones, donde los procesos de aprendizaje en el trabajo y de pérdida de destreza son de carácter acumulativo. El objetivo es definir una tasa de utilización del factor trabajo, que hemos denominado efectiva, que tenga en cuenta el nivel de destreza agregado en la economía y estudiar su comportamiento frente a una tasa real o NAIRU persistente. Esta novedosa medida de utilización del factor trabajo permite superar los problemas de medición de las poblaciones activa, parada y empleada asociados con un mercado donde los trabajadores son heterogéneos.

En primer lugar obtenemos que las tasas efectivas y reales difieren, con lo que su comportamiento dinámico difiere. En el caso de no admitir reempleo, es decir, cuando hay "ranking" total en la economía, el elemento que provoca la diferencia entre ambas tasas es la pérdida de destreza y no el aprendizaje. Si se incorpora el reempleo ambos elementos influyen en esta divergencia.

Otra conclusión interesante es que la tasa efectiva es, en general, menos volátil que la NAIRU. Por tanto, será un indicador alternativo de la evolución a largo plazo de una economía. Las ventajas o inconvenientes de cada uno dependerán del modelo de equilibrio general que se formule.

También es posible encontrar variaciones de los parámetros estructurales que modifican el valor de largo plazo de la tasa real y que dejan inalterada la tasa efectiva. Y esto es posible aunque se incorpore la posibilidad de reempleo. Adicionalmente, la tasa efectiva describe un comportamiento cíclico antes de retornar a su valor de equilibrio que indicaría la conveniencia de analizar el ciclo económico teniendo como referencia variables relacionadas con el uso de la destreza agregada.

En síntesis, se han aportado argumentos que justifican la hipótesis de que si el mercado de trabajo se desenvuelve en unidades efectivas, las variaciones a largo plazo de la tasa de paro observadas en la realidad o las estimadas para la NAIRU se podrían corresponder con una tasa efectiva de paro constante, o mucho menos variable, aunque los fenómenos de aprendizaje y de pérdida de destreza sean acumulativos. Este resultado indica que el análisis de la tasa efectiva de paro puede ser un concepto novedoso y rico en cuanto a posibilidades de análisis del mercado de trabajo.

Referencias Bibliográficas

ANDRÉS, J. (1993). "La Persistencia del Desempleo Agregado: Una Panorámica", *Moneda y Crédito,* 197, pp. 91-127.

BEAN, C.R. (1994a). "European Unemployement: A Survery", *Journal of Economic Literature*, XXXII, pp. 573-619.

BEAN, C.R. (1994b). "European Unemployement: A Restrospective", *European Economic Reviw*, 38,pp. 523-534.

BLANCHARD, O. (1958). "Debt, Deficits, and Finite Horizons", *Journal of Political Economy,* 93, pp. 223-247.

BLANCHARD, O. y DIAMOND, P. (1994). "Ranking, Unemployment Duration and Wages", *Review of Economic Studies*, 61, pp. 417-434.

BLANCHARD, O. y FISHER, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics.* MIT Press.

DEL LAMO, A. y DOLADO, J. (1993) "Un Modelo del Mercado de Trabajo y la Restricción de Oferta en la Economía Española", *Investigaciones Económicas,* XVII, pp. 87-118.

JACKMAN, R. y LAYARD, R. (1991). "Does Long-Term Unemployment Reduce a Person's Chance of Job?", *Economica,* 58, pp. 93-106.

JAEGER, A. y PARKINSON, M. (1994). "Some Evidence on Hysteresis in Unemployment Rates", *European Economic Review,* 38, pp. 329-342.

KARANASSOU, M. y SNOWER, D. (1997). "Is the Natural Rate a Reference Point?", *European Economic Review,* 41, pp. 559-569.

LAYARD, R. y BEAN, C. (1989). "Why does Unemployment Persist?", *Scandinaviam Journal of Economics,* 91, pp. 371-396.

LAYARD, R., NICKELL, S. y JACKMAN, R. (1991). *Unemployment Macroeconomic* Performance and Labour Market, Oxford University Press, Oxford.

NICKELL, S. y BELL, B. (1995). "The Collapse in Demand for Unskilled and Unemployment Across the OCDE", *Oxford Review of Economic Policy,* 11, pp. 40-62.

PISSARIDES, C. (1992). "Loss of Skill During Unemployment and the Persistence of Employment Shocks", *Quarterly Journal of Economics,* 107, pp. 1371-1391.

APÉNDICE

a) Shock permanente en α: Modelo M2

Sea h el instante de tiempo en el que se produjo la variación, Δ, del parámetro α. La población empleada efectiva correspondiente a las generaciones que ya estaban en el mercado de trabajo con anterioridad a ese instante h será:

$$PEE_t^1 = PE_t^1 = \int_{-\infty}^{h} p \exp[-p(t-s)] \Big(1 - \int_{s}^{h} \alpha \exp[-\alpha(x-s)]dx$$

$$+ \int_{h}^{t} (\alpha+\Delta) \exp[-(\alpha+\Delta)(x-s)]dx\Big)ds =$$

$$= \frac{p}{p+\alpha+\Delta} \exp[-(p+\alpha+\Delta)(t-h)] + \exp[-p(t-h)] \left(\frac{p}{p+\alpha} - \frac{p}{p+\alpha+\Delta}\right) \qquad [A1]$$

Y la correspondiente a generaciones posteriores es:

$$PEE_t^2 = \int_{h}^{t} p \exp[-p(t-s)] \Big(1 - \int_{s}^{t} (\alpha+\Delta) \exp[-(\alpha+\Delta)(x-s)]dx\Big) ds =$$

$$= \frac{p}{p+\alpha+\Delta} \Big(1 - \exp[-(p+\alpha+\Delta)(t-h)]\Big) \qquad [A1']$$

De [A1] y [A1'] se obtiene la población empleada efectiva, la real y la población parada:

$$PEE_t = PE_t = \frac{p}{p+\alpha+\Delta} + \exp[-p(t-h)] \left(\frac{p}{p+\alpha} - \frac{p}{p+\alpha+\Delta}\right) =$$

$$= \frac{p}{p+\alpha+\Delta} + \exp[-p(t-h)] \frac{\Delta p}{(p+\alpha)(p+\alpha+\Delta)} \qquad [A2]$$

El cálculo de la población parada efectiva es más complejo dado que hay que tener en cuenta el parámetro de pérdida de destreza. Para los trabajadores que se incorporaron al mercado antes del instante h es:

$$PPE_t^1 = \int_{-\infty}^{h} p \exp[-p(t-s)] \Big(\int_{s}^{h} \alpha \exp[-\alpha(x-s)-\beta(t-x)]dx +$$

$$+ \int_{h}^{t} (\alpha+\Delta) \exp[-(\alpha+\Delta)(x-s)-\beta(t-x)]dx \Big) ds =$$

$$= \frac{\alpha p}{(p+\alpha)(p+\beta)} \exp[-(p+\beta)(t-h)] +$$

$$+ \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(\beta-\alpha-\Delta)} \exp[-p(t-h)] \Big(\exp[-(\alpha+\Delta)(t-h)] - \exp[-\beta(t-h)]\Big) \quad [A3]$$

Y para las generaciones que surgen a partir del instante h:

$$PPE_t^2 = \int_{h}^{t} p \exp[-p(t-s)] \int_{s}^{t} (\alpha+\Delta) \exp[-(\alpha+\Delta)(x-s)-\beta(t-x)]dx \; ds =$$

$$= \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} + \frac{(\alpha+\Delta)p}{\beta-\alpha-\Delta} \Big(\frac{\exp[-(p+\beta)(t-h)]}{(p+\beta)} - \frac{\exp[-(p+\alpha+\Delta)(t-h)]}{(p+\alpha+\Delta)} \Big) \quad [A3']$$

Y disponemos ya de la población parada efectiva:

$$PPE_t = PPE_t^1 + PPE_t^2 =$$

$$= \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} + \exp[-(p+\beta)(t-h)] \frac{\Delta p^2}{(p+\alpha)(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} + \exp[-(p+\beta)(t-h)] \Big(\frac{\alpha p}{(p+\alpha)(p+\beta)} - \frac{(\alpha+\Delta)p}{(p+\alpha+\Delta)(p+\beta)} \Big) \quad [A4]$$